Problemă propusă pentru clasa a X-a

Enunț:

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$[\log_4 x]+[\log_4 2x]=\log_2 2\sqrt{x}.$$

(S-a notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a.)

Profesor Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Soluție:

$[\log_4 x]+[\log_4 2x]=[\log_4 x]+[\log_4 2+\log_4 x]=[\log_4 x]+\left[\frac{1}{2}+\log_4 x\right]=[2\cdot\log_4 x]$ conform identității lui Hermite $[t]+\left[t+\frac{1}{2}\right]=[2t],\forall t\in\mathbb{R}$.

Ecuația din enunț devine: $[2\log_4 x]=\log_2 2\sqrt{x}\Rightarrow[2\log_4 x]=1+\frac{1}{2}\log_2 x\Rightarrow[2\log_4 x]=1+\log_4 x$.

Notând $y=\log_4 x$ și rezolvând ecuația $[2y]=y+1$ se obține $y=1\Rightarrow\log_4 x=1\Rightarrow x=4$